955. 二三ノ函数方程式ノ可測解ニ就イテ

春木　博（神戸高商船）

§1. 明ニ $(x+y)^4+(x-y)^4=2x^4+2y^4+12x^2y^2$ が成立スル。今逆ニ次ノ函数方程式

$$\text{(F)}\quad f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)+\varphi(x)y^2$$

ヲ満足セシメル可測函数 $f(x)$, $\varphi(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

$$\varphi(x)=\frac{1}{y^2}\{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)-2f(y)\}$$

故ニ

$$\begin{aligned}&\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x)-2\varphi(y)\\&=\frac{1}{y^2}\{f(x+2y)+f(x)-2f(x+y)-2f(y)\\&\quad+f(x)+f(x-2y)-2f(x-y)-2f(y)\\&\quad-2f(x+y)-2f(x-y)+4f(x)+4f(y)\\&\quad-2f(2y)-2f(0)+4f(y)+4f(y)\}\end{aligned}$$

シカルニ (F) ニヨリ

$$f(x+2y)+f(x-2y)=2f(x)+2f(2y)+4\varphi(x)y^2$$

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)+\varphi(x)y^2$$

$$f(0)=0$$

ナル故

$$\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x)-2\varphi(y)=0$$

$$\therefore\quad \varphi(x+y)+\varphi(x-y)=2\varphi(x)+2\varphi(y)$$

$\varphi(x)$ ハ可測ナル故 $\varphi(x)=ax^2$ (a ハ任意ノ実数)

$\varphi(x)$ が判レバ $f(x)$ が可測ナル故、雑誌函数方程式 26

号ト同様ノ方針ニヨリ結局

$$\begin{cases} f(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 \\ \varphi(x) = 12\alpha x^2 \end{cases} \quad (\alpha, \beta \text{ ハ任意ノ實數})$$

§2. 明ニ $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y$

ガ成立スル。今逆ニ次ノ函數方程式

$$(G) \quad f(x+y) - f(x-y) = -2g(x)g(y)$$

ヲ満足セシメル可測函数 $f(x)$, $g(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

$$g(x) = -\frac{1}{2g(y)}\{f(x+y) - f(x-y)\}$$

故ニ
$$g(x+y) + g(x-y)$$

$$= -\frac{1}{2g(y)}\{f(x+2y) - f(x) + f(x) - f(x-2y)\}$$

$$= -\frac{1}{2g(y)}\{f(x+2y) - f(x-2y)\}$$

$$= -\frac{1}{2g(y)} \times (-2g(x)g(2y)) \quad ((G) \text{ ニヨル})$$

$$= \frac{g(x)g(2y)}{g(y)}$$

故ニ $\varphi(y) = \dfrac{1}{2} \dfrac{g(2y)}{g(y)}$ トオケバ

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)\varphi(y)$$

$g(x)$, $\varphi(x)$ ハ可測ナル故、コレヨリヨク知ラレタル如ク

$$g(x) = \alpha x + \beta \quad (\alpha, \beta \text{ ハ任意ノ實數})$$

又ハ $g(x) = \alpha\sin\beta x + \gamma\cos\delta x$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ハ任意ノ

實数)

又ハ $g(x)=\alpha \sinh \beta x+\gamma \cosh \delta x$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ハ任意ノ實数)

$g(0)=0$ ナル故 $g(x)=\alpha x$

又ハ $g(x)=\alpha \sin \beta x$

又ハ $g(x)=\alpha \sinh \beta x$

(G) ニ於テ $y=x$ トオケバ

$$f(2x)=-2g^2(x)+f(0)$$

$$\therefore \ f(x)=-2g^2\left(\frac{x}{2}\right)+f(0)$$

結局 α, β, γ ヲ任意ノ実数トスルトキ

$$\begin{cases} f(x)=-\dfrac{1}{2}\alpha^2 x^2+\beta \\ g(x)=\alpha x \end{cases}$$

又ハ $$\begin{cases} f(x)=-2\alpha^2 \sin^2 \dfrac{1}{2}\beta x+\gamma \\ g(x)=\alpha \sin \beta x \end{cases}$$

又ハ $$\begin{cases} f(x)=-2\alpha^2 \sinh^2 \dfrac{1}{2}\beta x+\gamma \\ g(x)=\alpha \sinh \beta x \end{cases}$$

§3. $\cos x$, $\sin x$ ノ間ニ

$$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2 y-\sin^2 x$$

ガ成立スル。

今逆ニ、次ノ函数方程式

(H) $f(x+y)f(x-y)=f^2(y)-g^2(x)$

ヲ充ス可測函数 $f(x)$, $g(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

$f(0)=0$ ナラバ (F) ニ於テ $y=0$ トオクコトニヨリ

$$f^2(x)+g^2(x)=0$$

$f(x)$, $g(x)$ ハ一價有限實數値函數ナル故, $f(x)\equiv 0$, $g(x)\equiv 0$ ヲ得ル。

故ニ、以下ニ於テハ $f(0)\neq 0$ トシテヨイ。更ニ

$f^*(x)=\dfrac{f(x)}{f(0)}$, $g^*(x)=\dfrac{g(x)}{f(0)}$ トオケバ, $f^*(0)=1$ ニシテ、シカモ $f^*(x)$, $g^*(x)$ ハ (F) ヲ滿足スル故、以下ニ於テハ $f(0)=1$ ナリトシテヨイ。

次ニ $f(x)$ ハ偶函數ナルコトヲ證明シヨウ。(F) ニ於テ $y=0$ トオケバ、$f(0)=1$ ナル故

$$(1)\quad f^2(x)+g^2(x)=1$$

(F) ニ於テ x ト y トヲイレカヘレバ

$$(2)\quad f(y+x)f(y-x)=f^2(x)-g^2(y)$$

シカルニ (1) ニヨリ

$$f^2(y)-g^2(x)=f^2(x)-g^2(y)$$

ナル故 (F) 及ビ (2) ヨリ

$$f(x+y)f(x-y)=f(y+x)f(y-x)$$

$y=-x$ トオケバ

$$f(0)=1$$

ナル故

$$f(2x)=f(-2x)$$

故ニ $f(x)$ ハ偶函數デアル。

(F) ニ於テ x, y ノ代リニ $\frac{x}{2}$ トオケバ

$$f(0)=1$$

ナル故

$$f(x)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)-g^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

故ニ　$f(x+y)+f(x-y)$

$$=\left\{f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)-g^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\}+\left\{f^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-g^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\right\}$$

$$=\left\{f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)-g^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\right\}+\left\{f^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-g^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\}$$

シカルニ (F) ニヨリ

$$f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)-g^2\left(\frac{x-y}{2}\right)=f(x)f(-y)$$

$$=f(x)f(y) \qquad (f(x)\text{ ハ偶函數})$$

又　$$f^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-g^2\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x)f(y)$$

故ニ　$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

$f(x)$ ハ可測ナル故、雑誌函數方程式第二十六号ニヨリ、α ヲ任意ノ實數トシタルトキ

$$f(x)=\cos\alpha x \quad 或ハ \quad f(x)=\cosh\alpha x$$

$f(x)=\cosh\alpha x$ ナラバ $f(x)\geqq 1$，シカモ (1) ニヨリ $f^2(x)+g^2(x)=1$ ナル故，$f(x)\equiv 1$，即チ $f(x)=\cos\alpha x$ ニ於テ $\alpha=0$ ノ場合デアル。$f(x)\equiv 1$ ハ $f(x)=\cos\alpha x$ ニ於テ $\alpha=0$ トシタ場合デモアルカラ結局求ムル解ハ α,β ヲ任意ノ實數トシタルトキ

$$f(x)=\alpha\cos\beta x,\ g(x)=\pm\alpha\sin\beta x$$

符号ノ取リ方ハ任意デアル。之レ等ハ明カニ (F) ヲ満足セシ

メル。

——（完）——